

# Knoten in der Mathematik

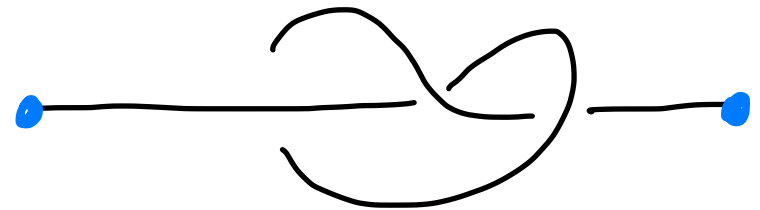
Arunima Ray, MPIM

# Was sind (mathematische) Knoten?

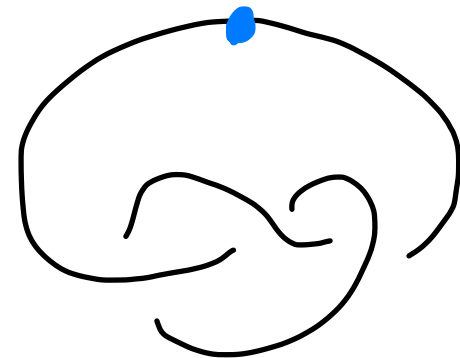
1. Nimm ein Stück Schnur



2. Binde einen Knoten hinein

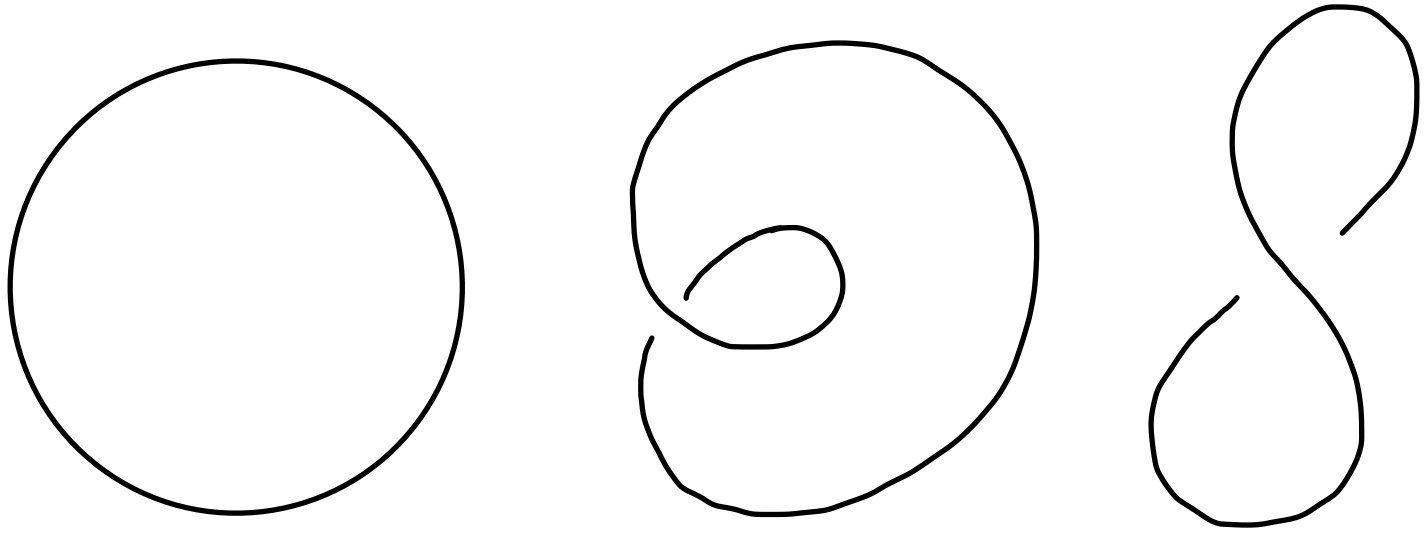


3. Verklebe die beiden Enden

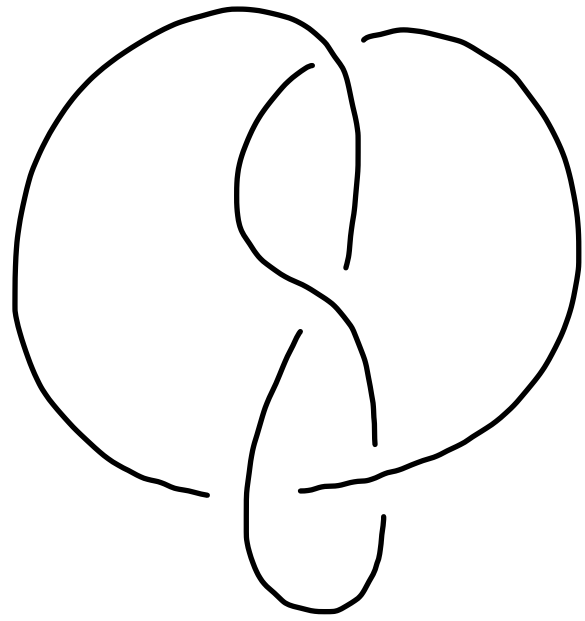


# Was sind (mathematische) Knoten?

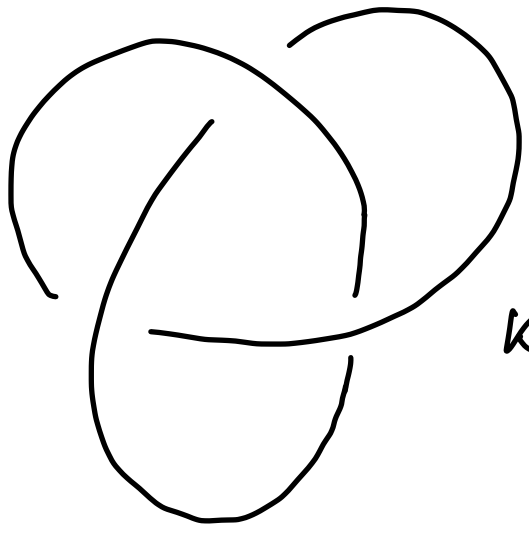
Der Unknoten  
oder  
der triviale  
Knoten



Der  
Achterknoten



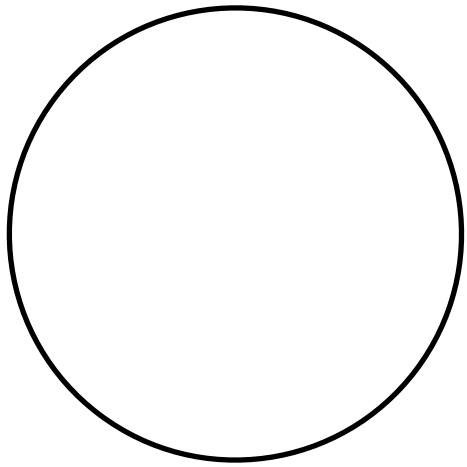
Die  
Kleeblattschlinge



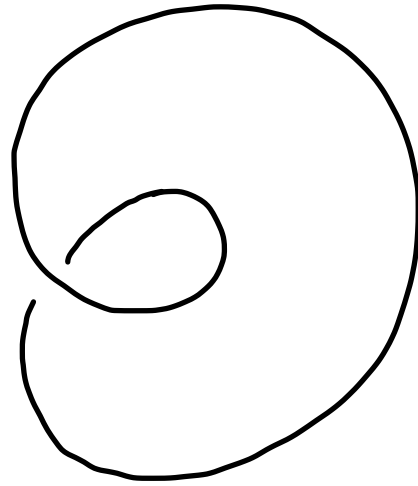
# Was sind (mathematische) Knoten?

Zwei Knoten gelten als **äquivalent**, wenn sie in einander überführt werden können.

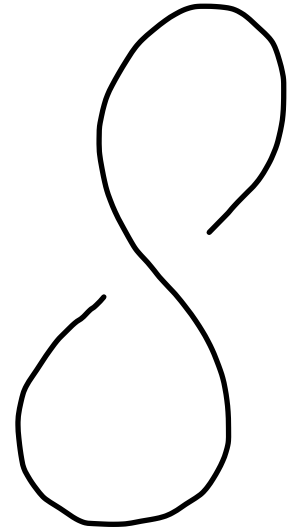
ZB:



=



=

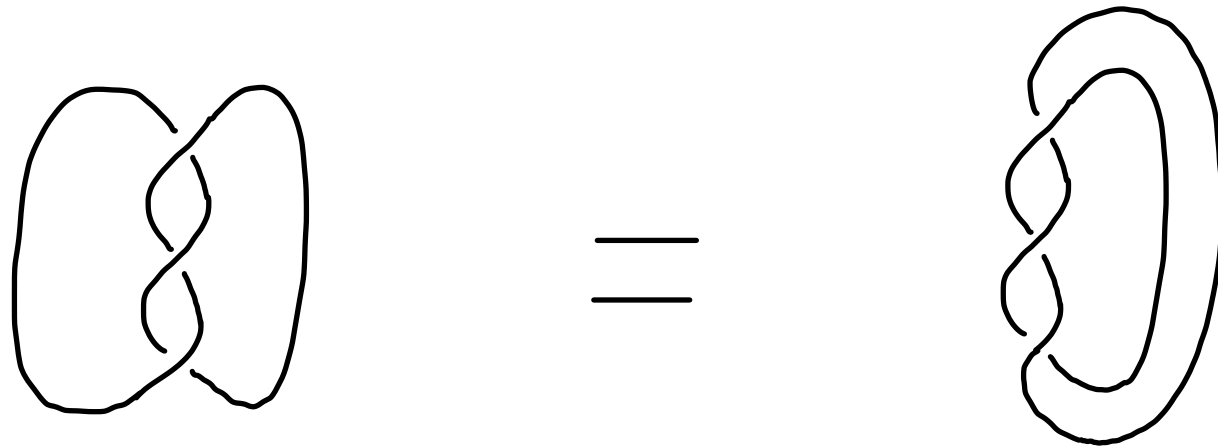


Der triviale Knoten / der Unknoten

# Was sind (mathematische) Knoten?

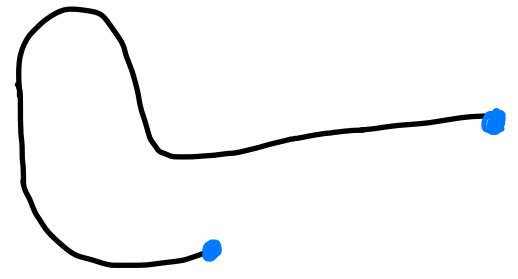
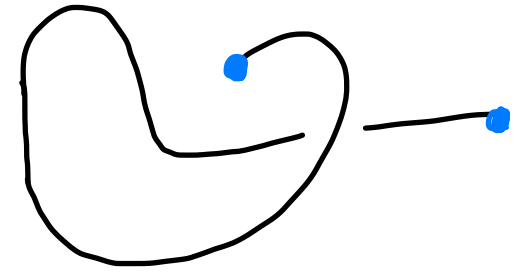
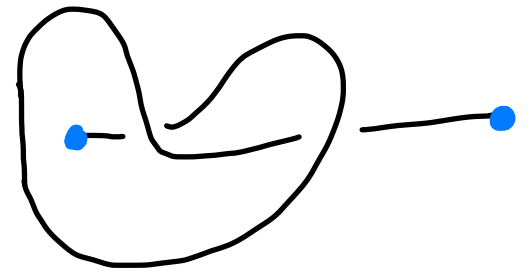
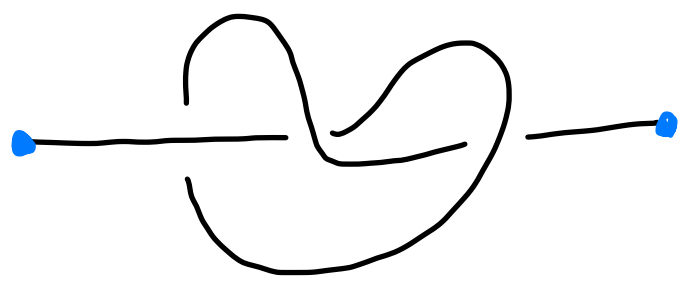
Zwei Knoten gelten als *äquivalent*, wenn sie ineinander überführt werden können.

ZB:



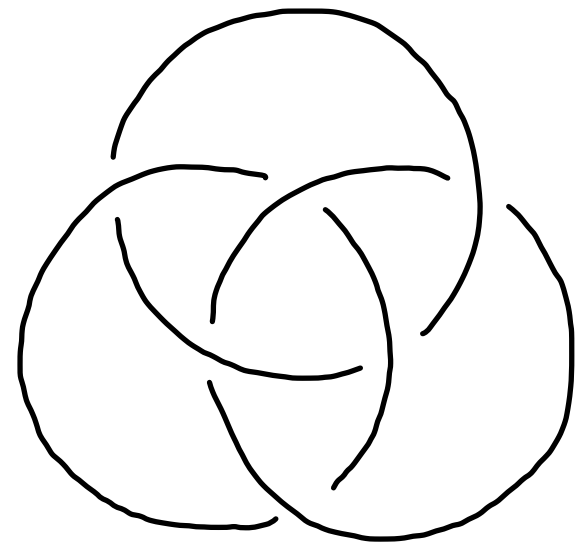
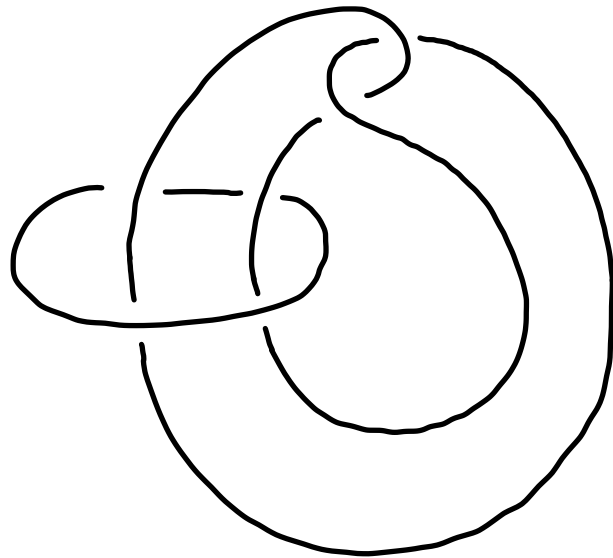
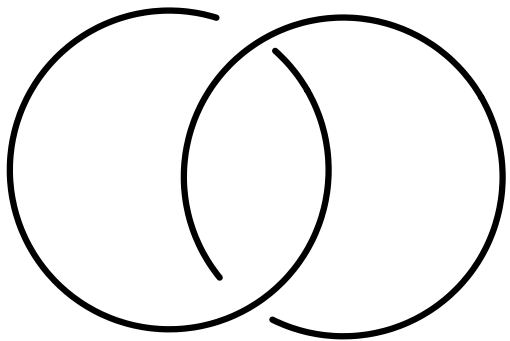
# Warum die beiden Enden verkleben?

Wenn nicht:



# Verschlingungen

Wie Knoten, aber mit mehrere Schnüre.



Die Borromäische  
Ringe.

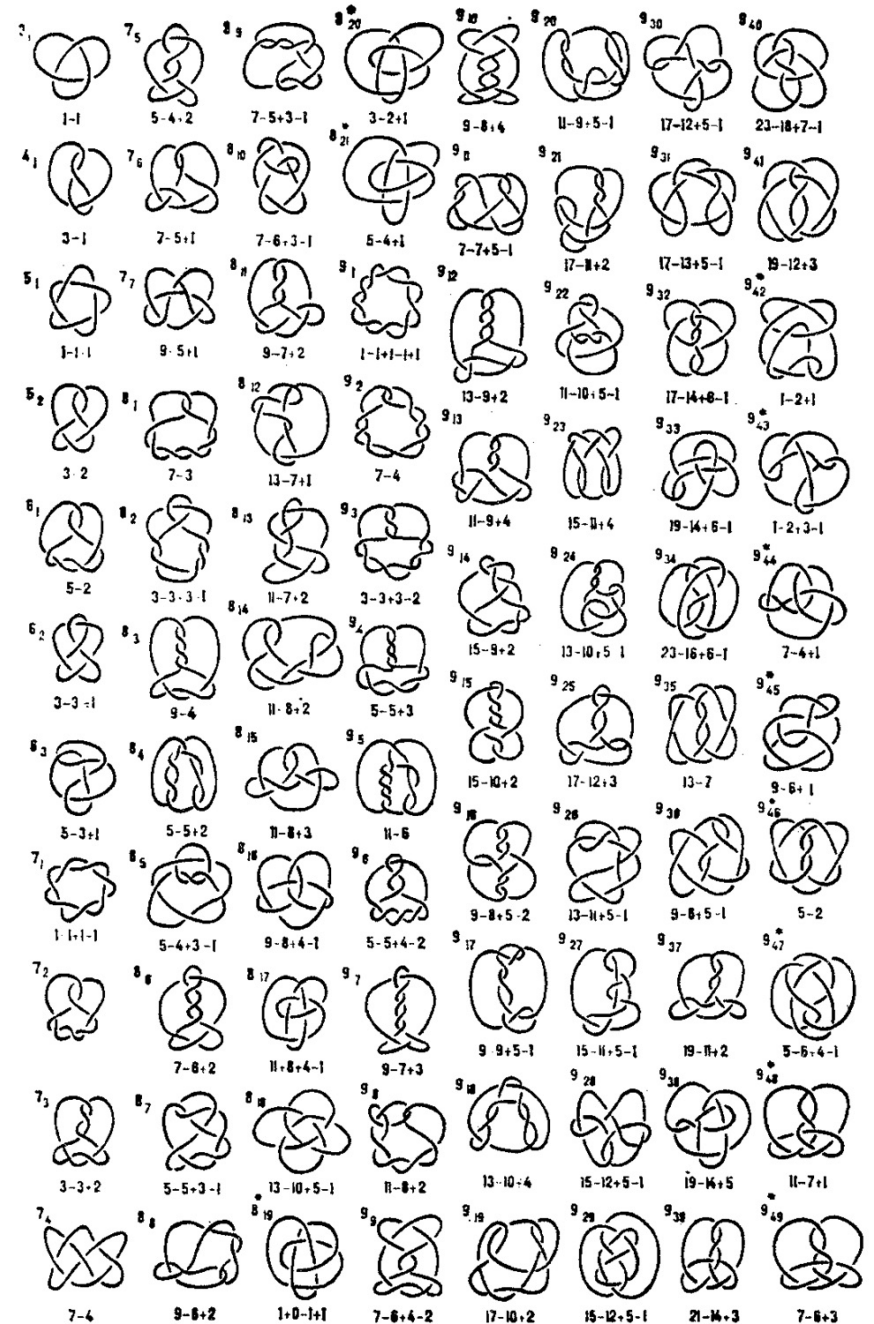
# Wieso werden Knoten untersucht?

- Die Äther-Hypothese ( $\sim 1700-1880$ )
  - Descartes, Hooke, Huygens
- Der gesamte "leere" Raum sei mit Materie ausgefüllt.  
(= Äther)
- Die verschiedenen Elemente seien Knoten (Wirbel) im Äther.



# Wieso werden Knoten untersucht?

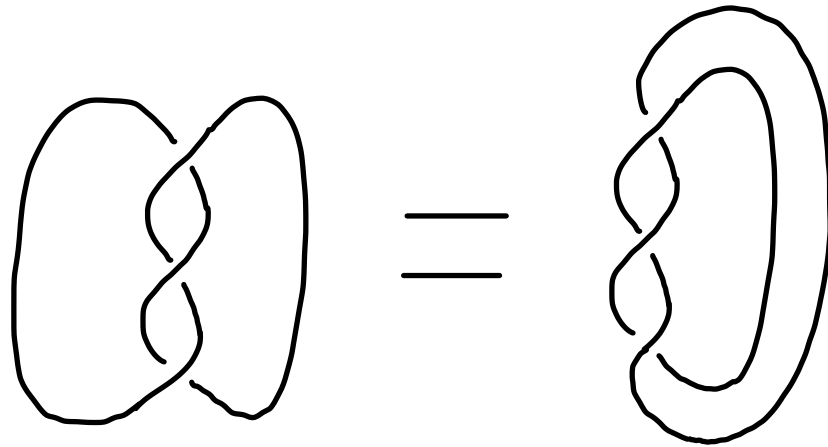
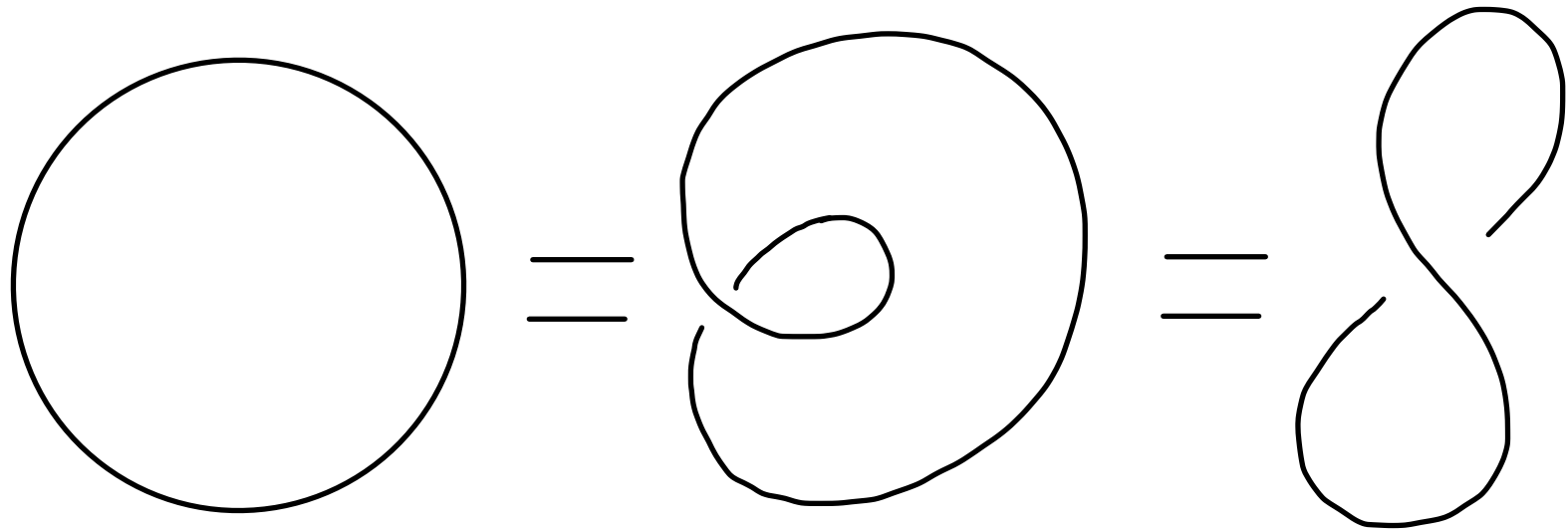
- Tabelle von Knoten
  - Lord Kelvin (1824-1907)
  - Peter Tait (1831-1901)
  - Ein Periodensystem von Knoten
- Michelson-Morley Experiment (1881)  
widerlegt die Äther-Hypothese



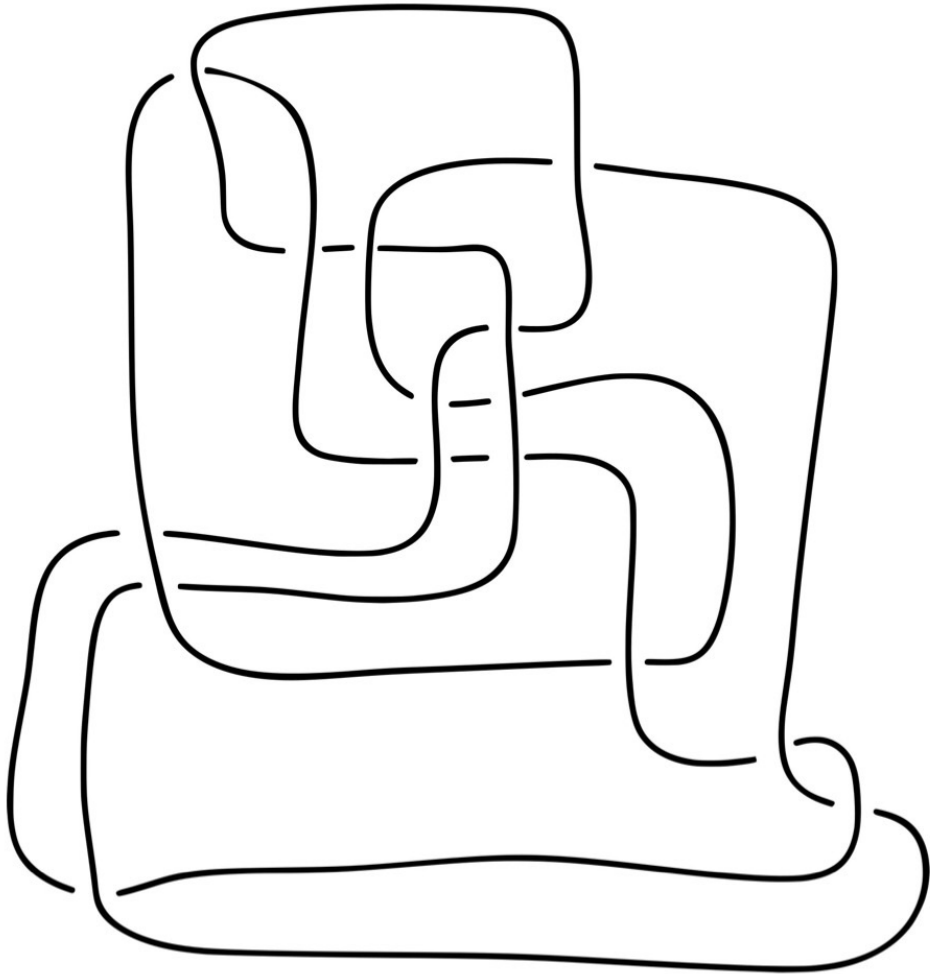
# Fragen in der Knotentheorie



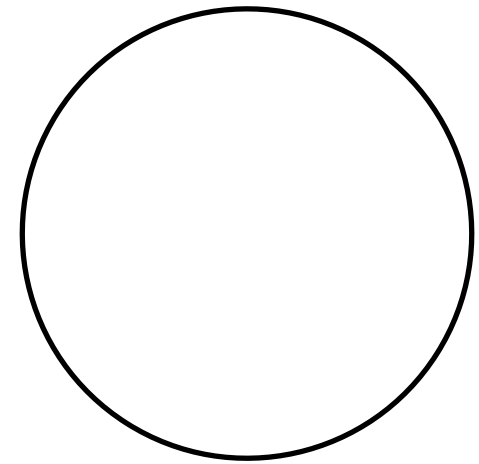
Welche Knoten sind äquivalent?



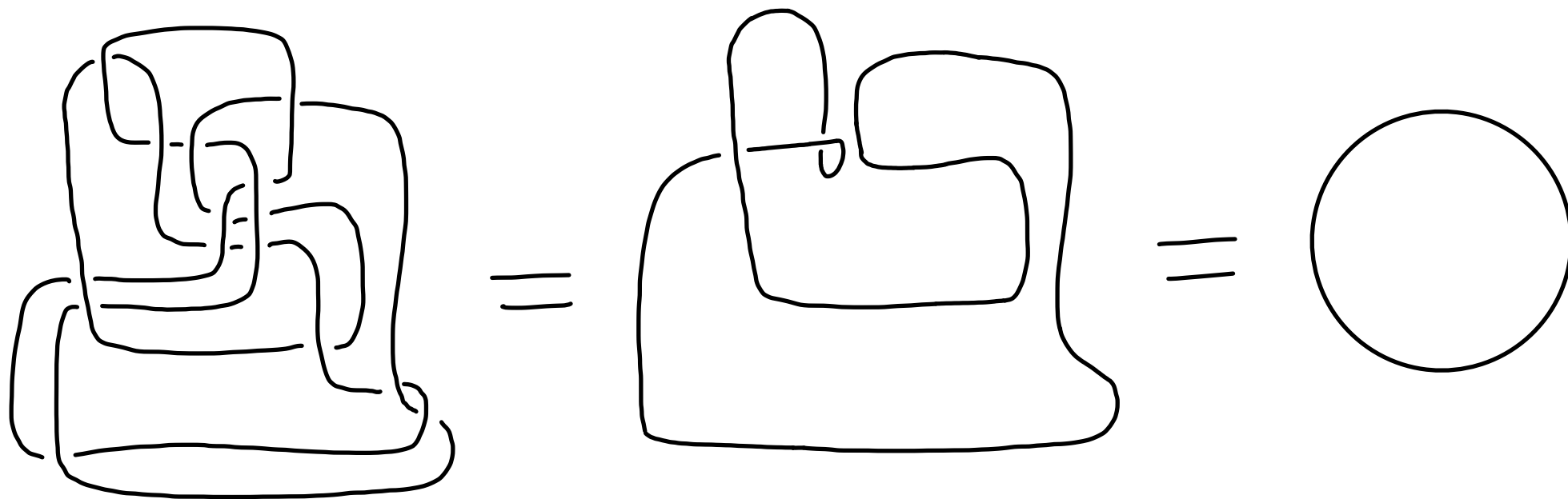
Welche Knoten sind äquivalent?



??  
∴  
=

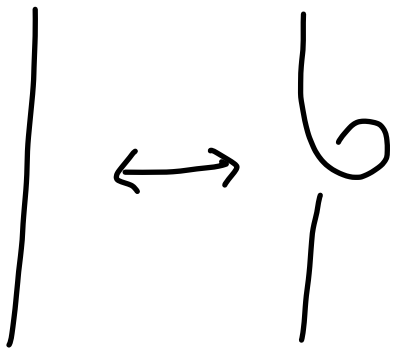




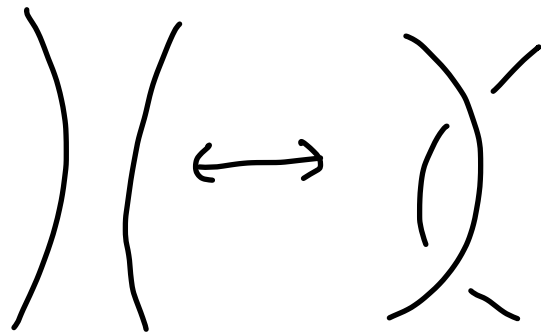


# Welche Knoten sind äquivalent?

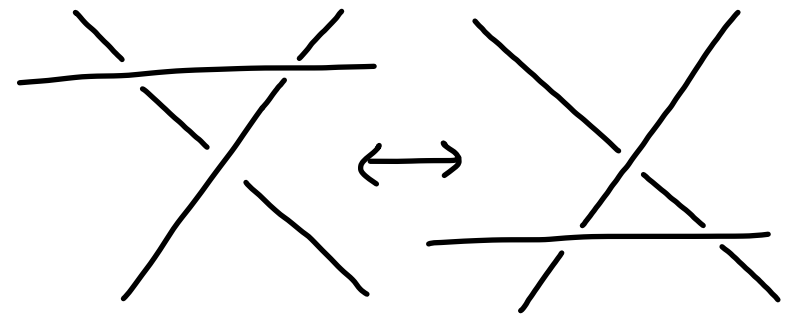
- Stellen zwei Diagramme denselben Knoten dar, sind sie durch Reidemeister-Züge verwandt
  - Kurt Reidemeister (1893 - 1971), einer der Väter von Knotentheorie



R1

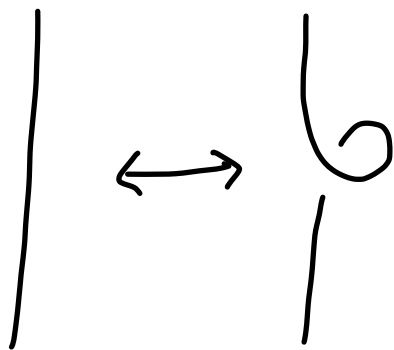


R2

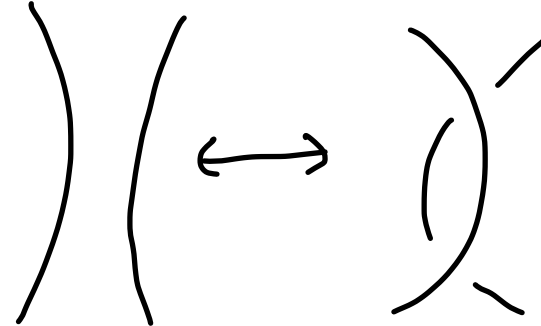


R3

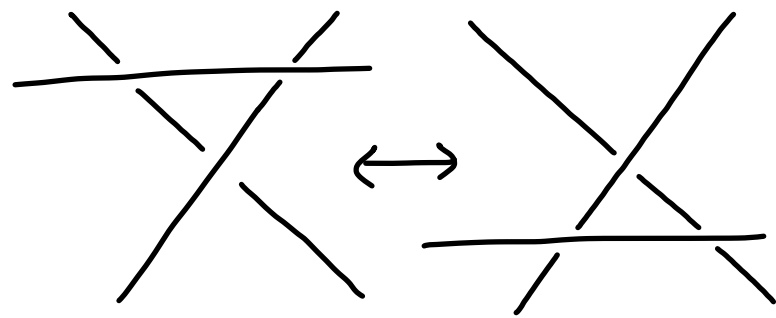
# Welche Knoten sind äquivalent?



R1

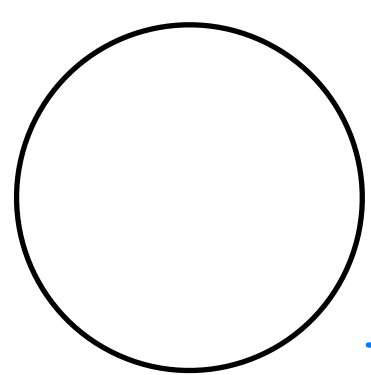


R2

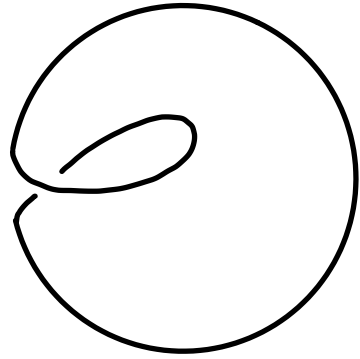


R3

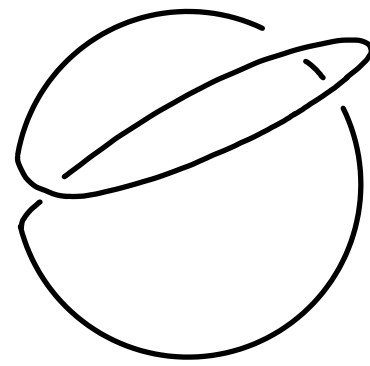
Zum Beispiel:



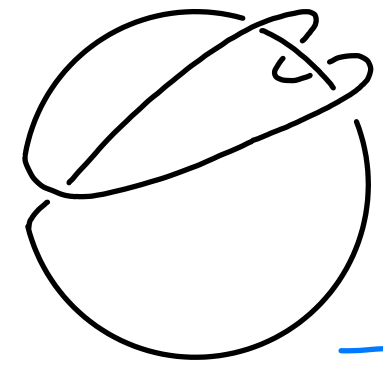
$\xrightarrow{R1}$



$\xrightarrow{R2}$



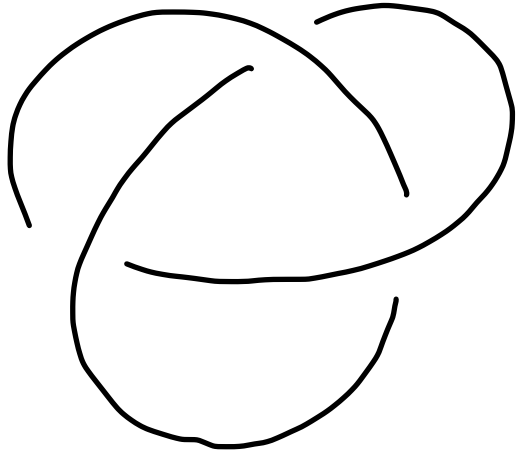
$\xrightarrow{R2}$



$\rightarrow \dots$

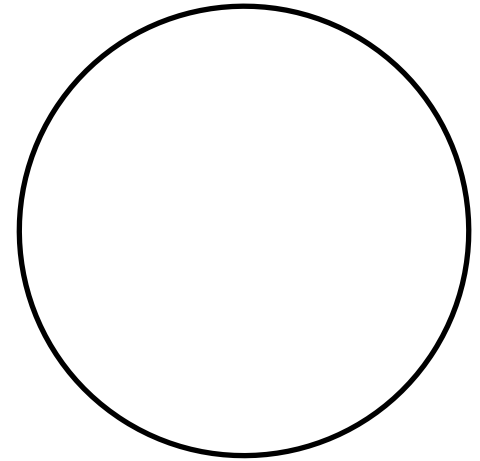


Welche Knoten sind äquivalent?



Die Kleeblattschling

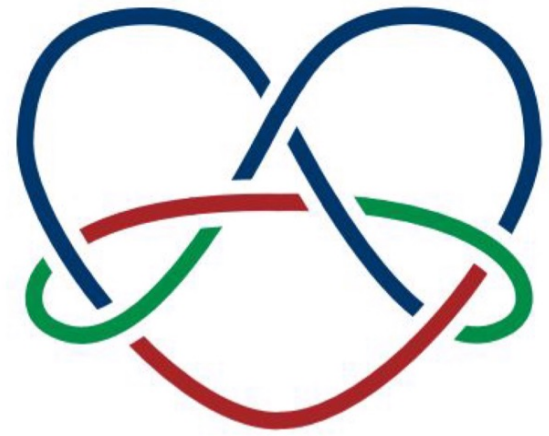
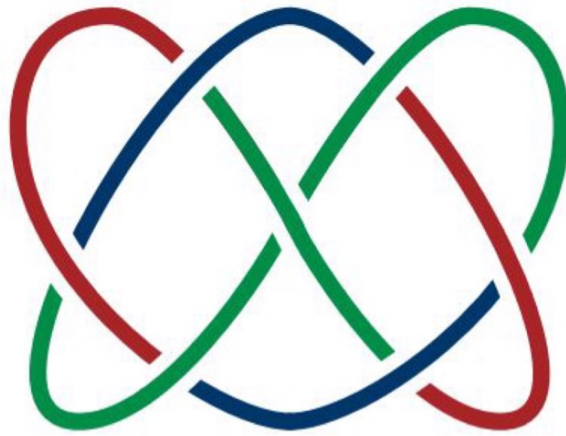
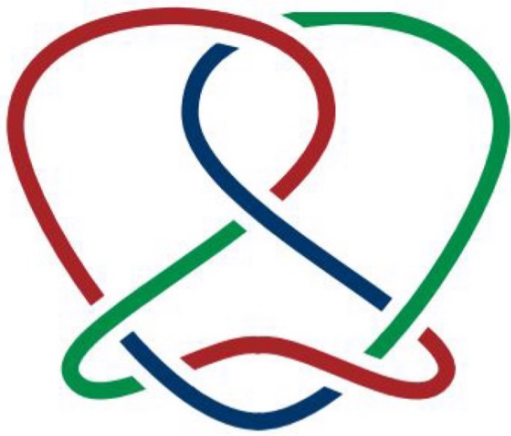
??  
:  
=



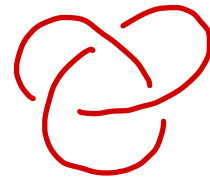
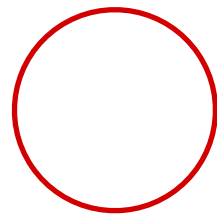
Der Unknoten

# Färbungen von Knoten

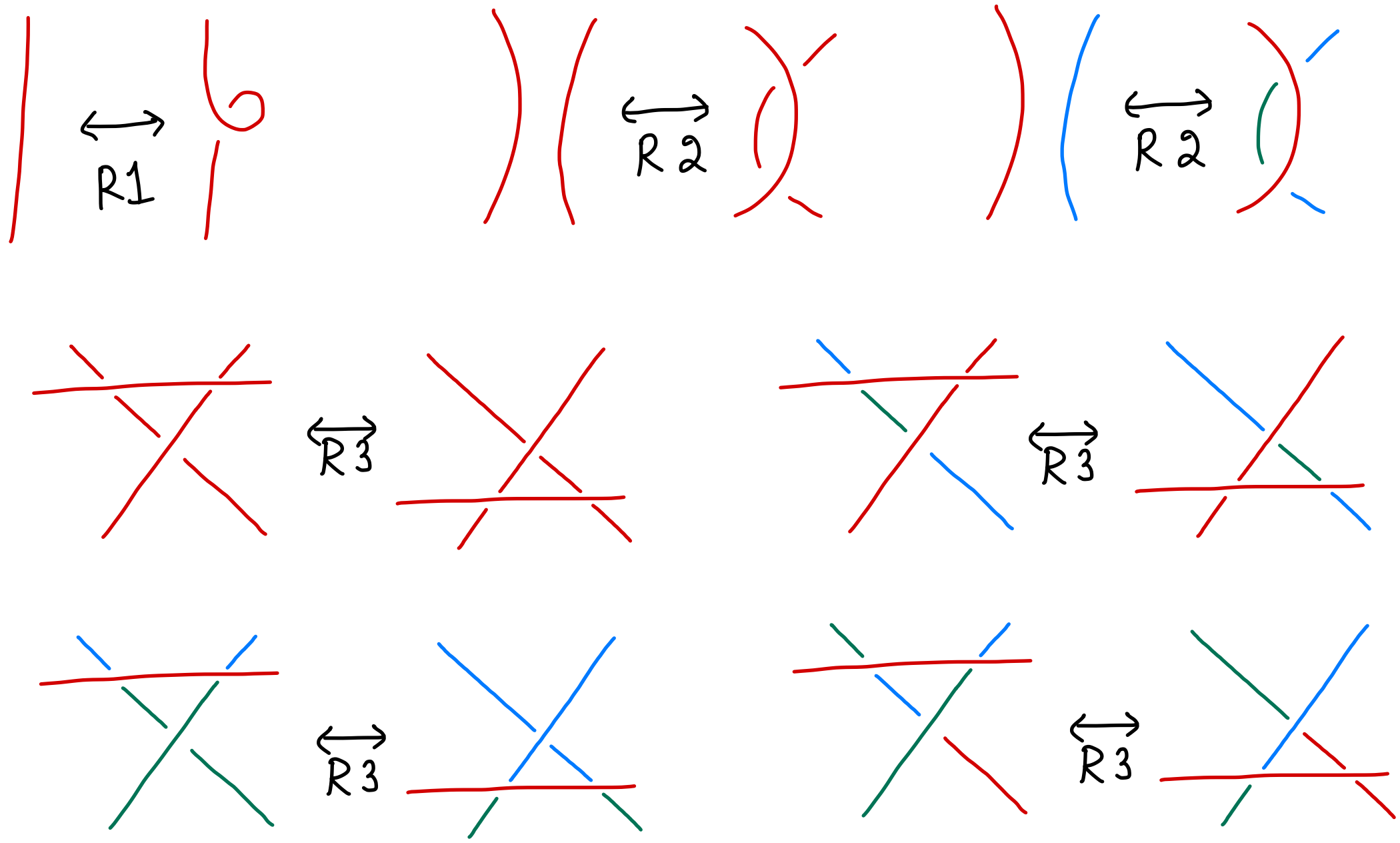
- Drei Farben: rot, blau, grün.
- An jeder Kreuzung, treten entweder eine Farbe oder alle drei Farben auf.



- Eine Färbung heißt *trivial*, wenn nur eine Farbe verwendet wird. zB



# Reidemeister-Züge mit Farben

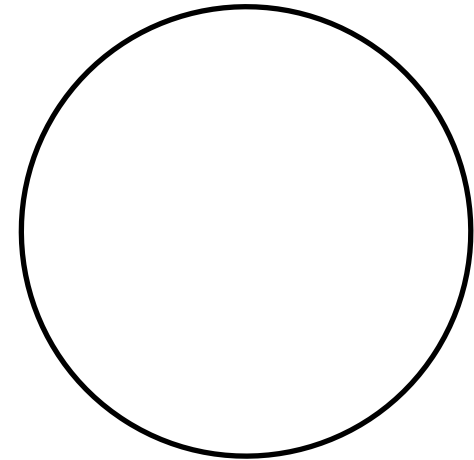
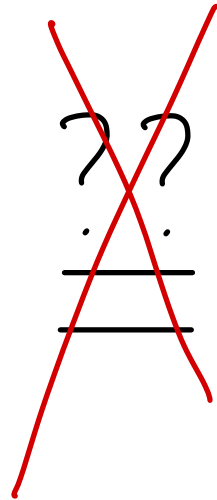
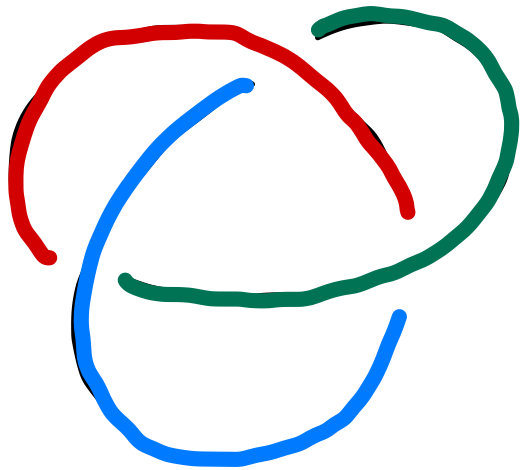


# Reidemeister-Züge mit Farben

Fazit: Wenn ein Knoten eine nicht-triviale Färbung zulässt, dann bleibt sie bei Reidemeister-Zügen erhalten.

# Welche Knoten sind äquivalent?

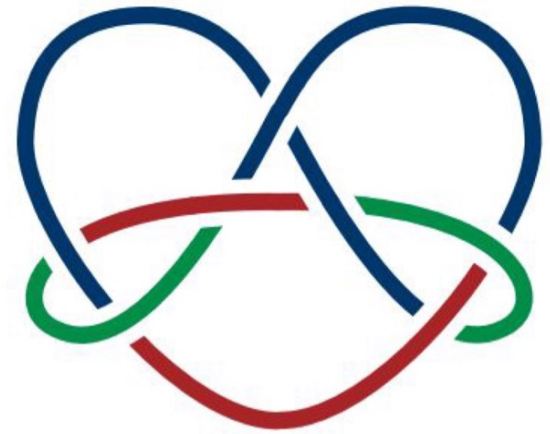
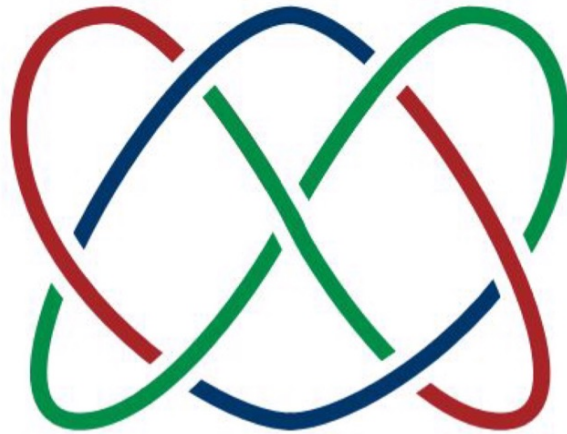
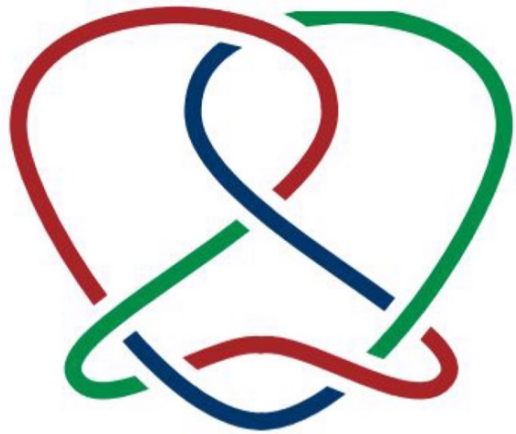
Fazit: Wenn ein Knoten eine nicht-triviale Färbung zulässt, dann bleibt sie bei Reidemeister-Zügen erhalten.



Der triviale Knoten hat nur die triviale Färbung

# Welche Knoten sind äquivalent?

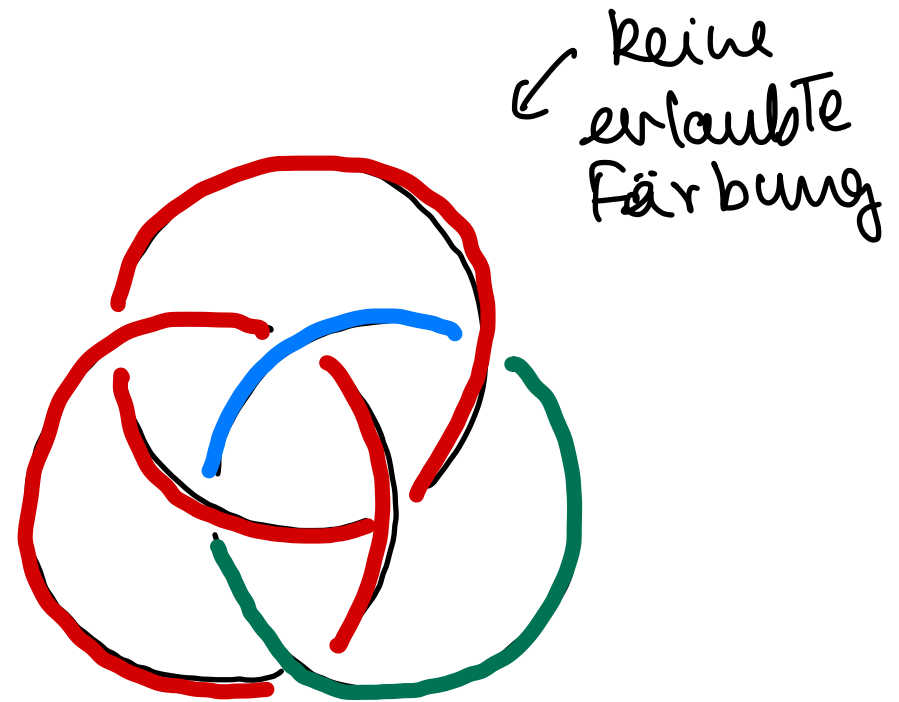
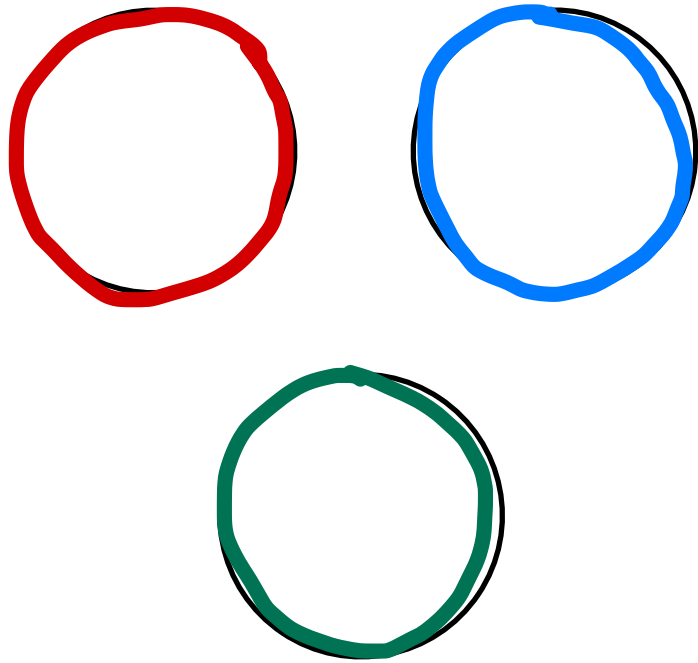
Fazit: Wenn ein Knoten eine nicht-triviale Färbung zulässt, dann bleibt sie bei Reidemeister-Zügen erhalten.



Keiner dieser Knoten ist trivial.

Frage: sind sie zueinander äquivalent?

# Verschlingungen



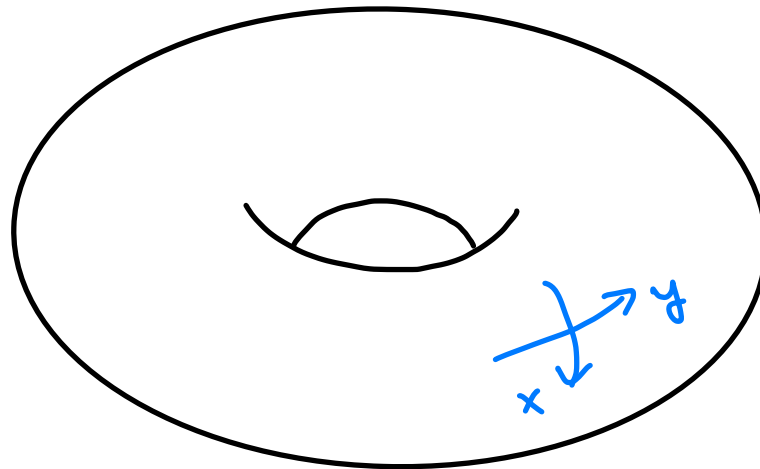
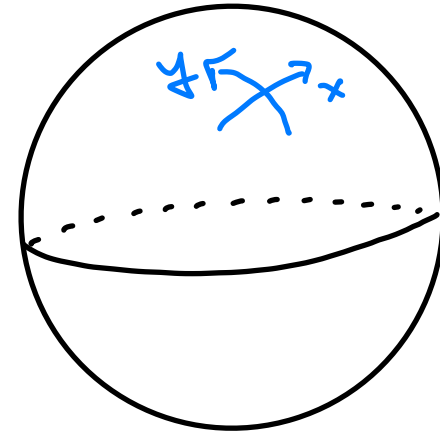
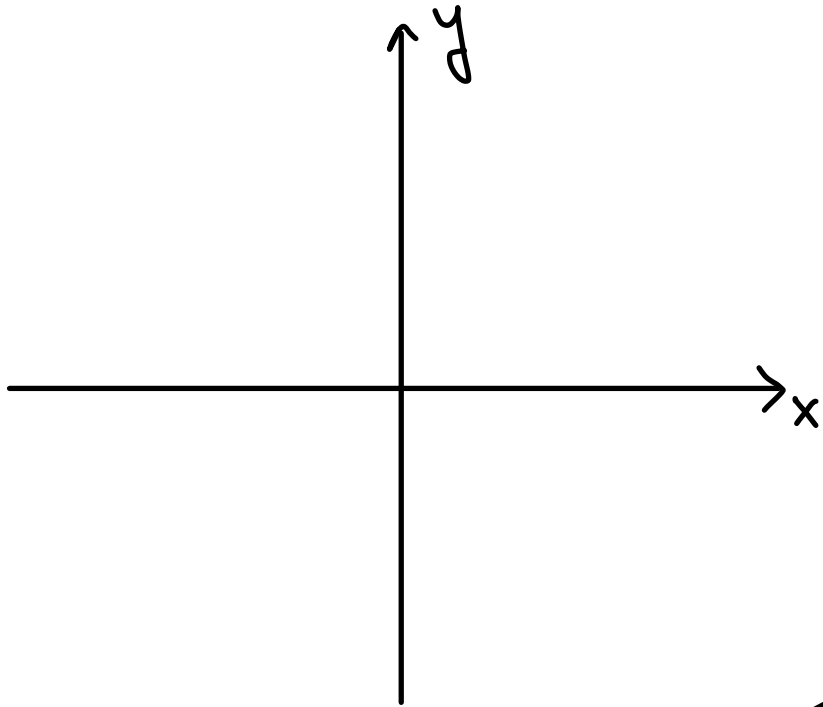
Die Ringe haben keine nicht-minimale Färbung.

Warum noch Knotentheorie?

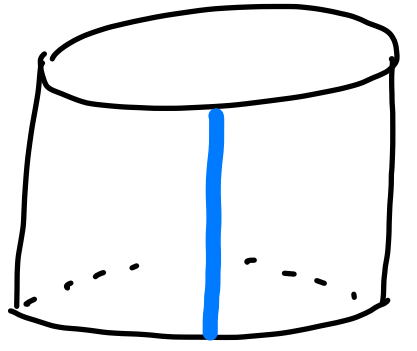
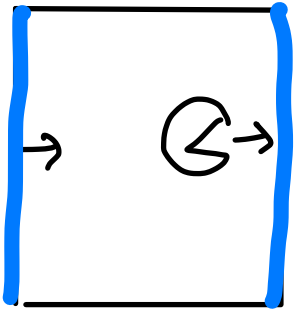
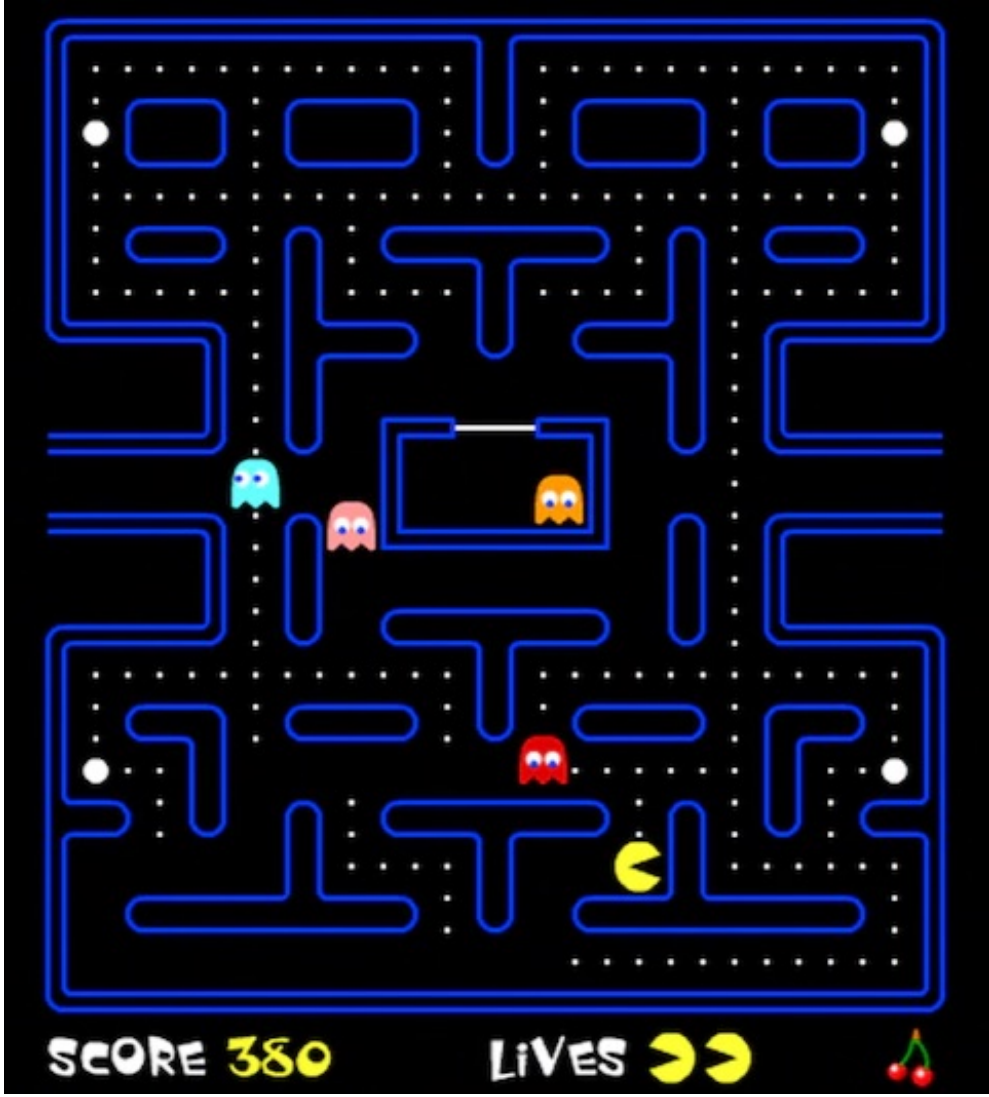




# Zwei-dimensionale Räume

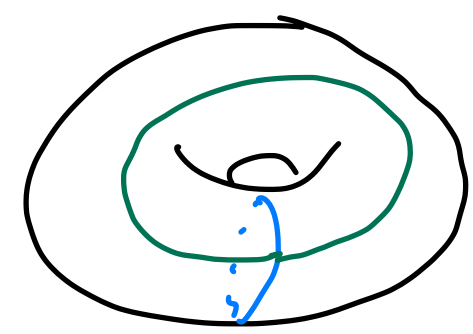
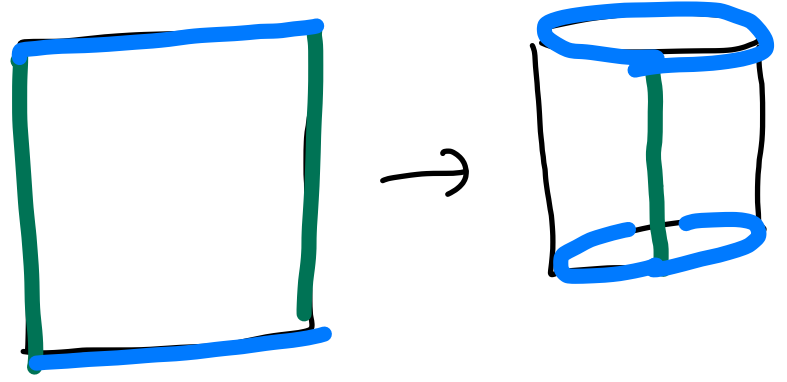
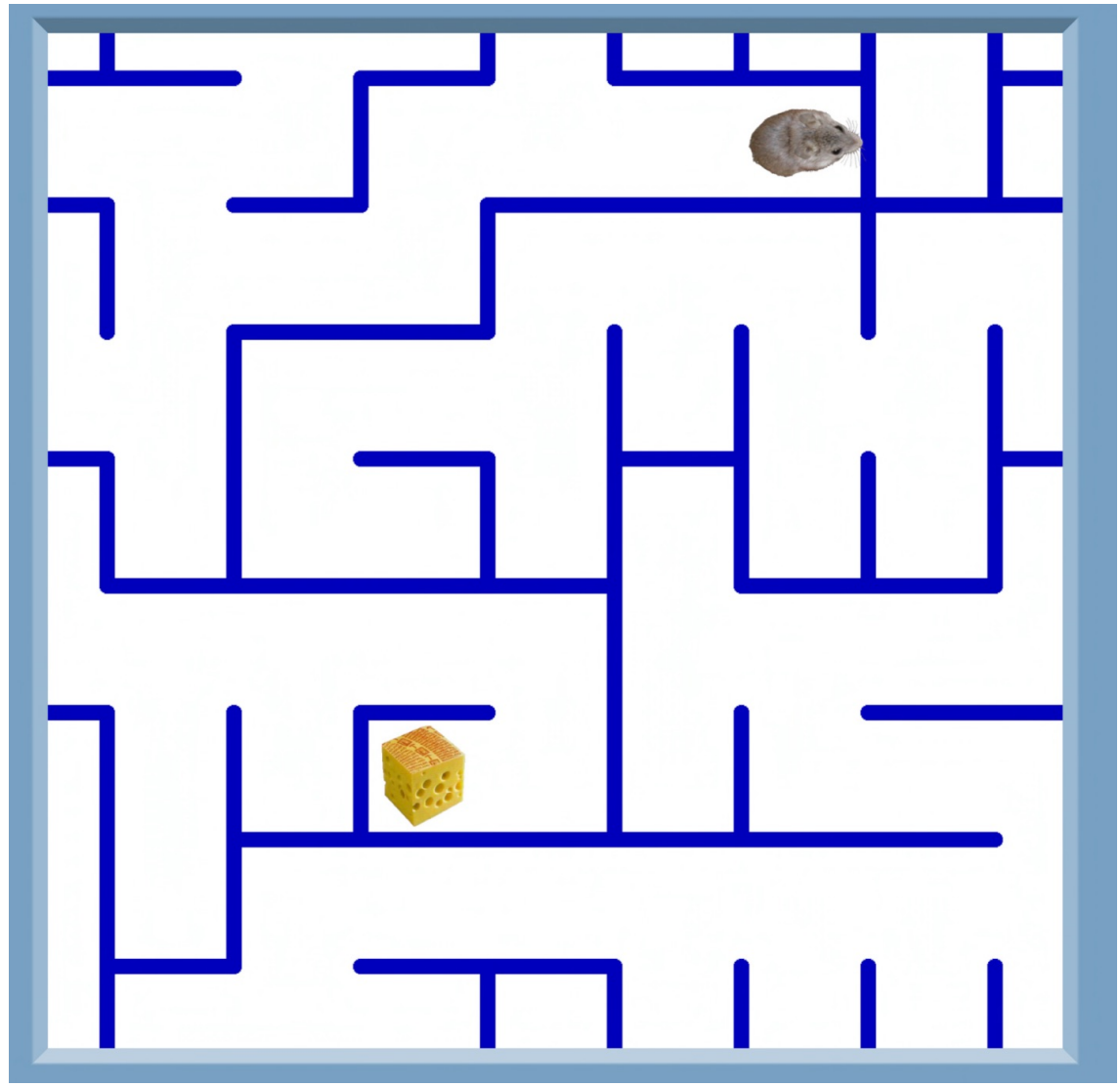


# Wo wohnt PAC-man?



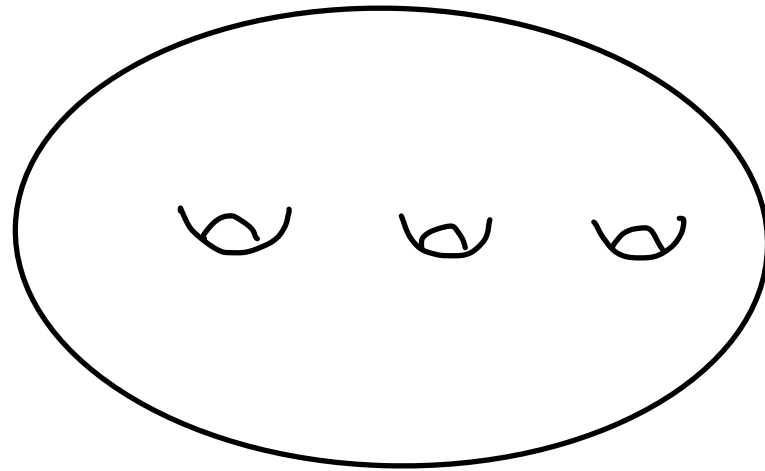
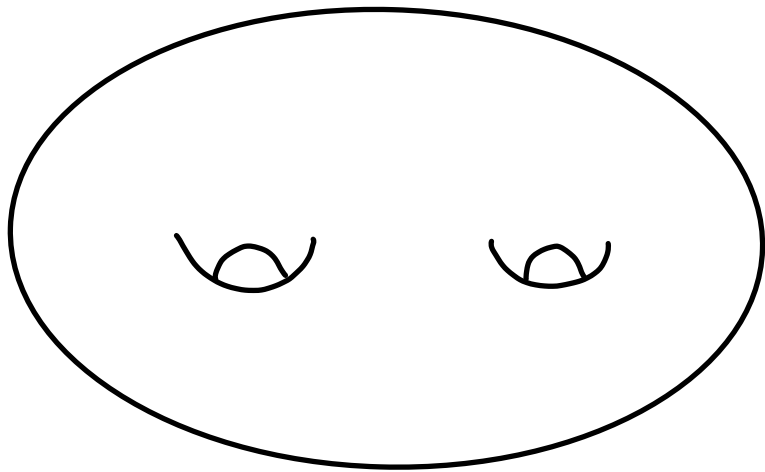
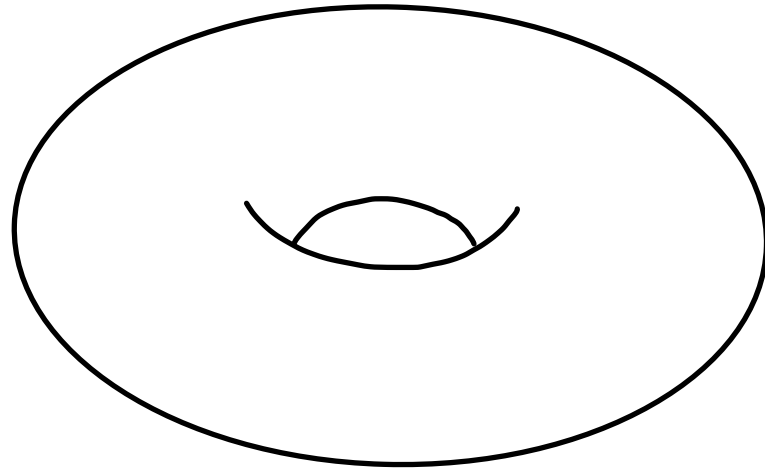
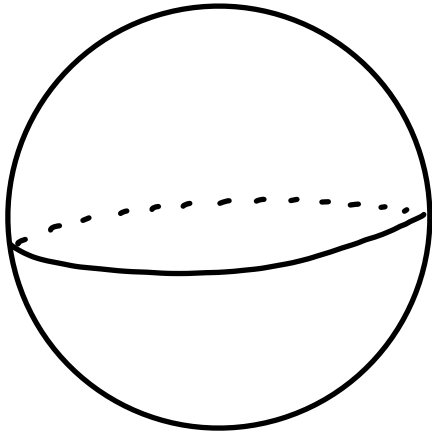
Ein Zylinder

# Wo wohnt PAC-man?



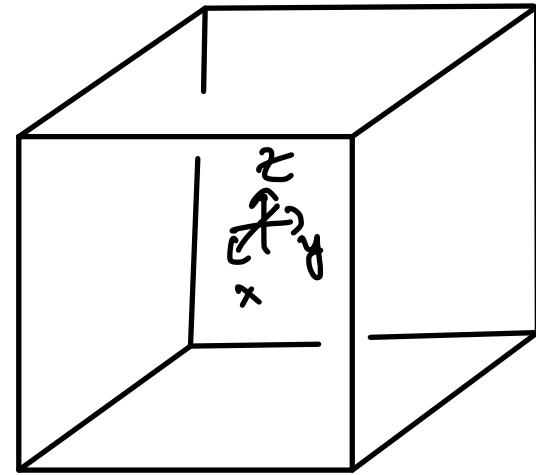
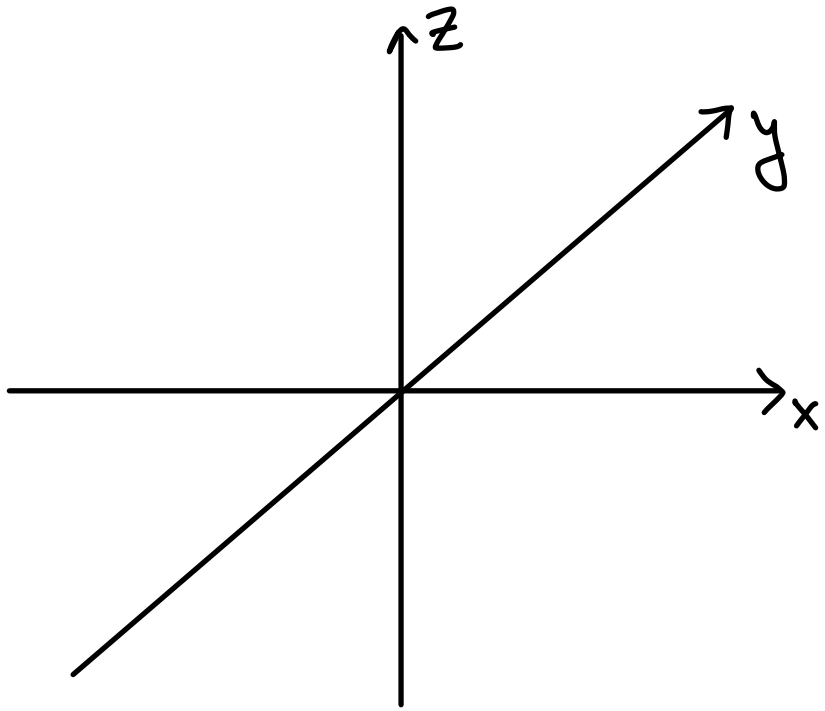
ein Torus

# Zwei-dimensionale Räume

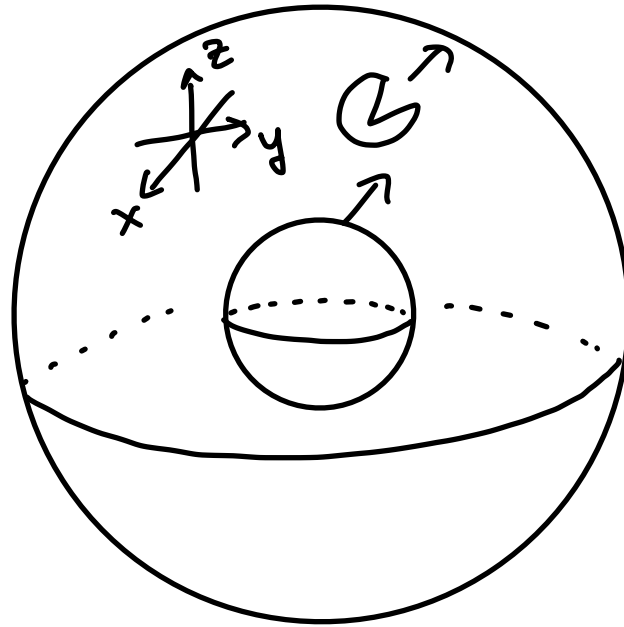


...

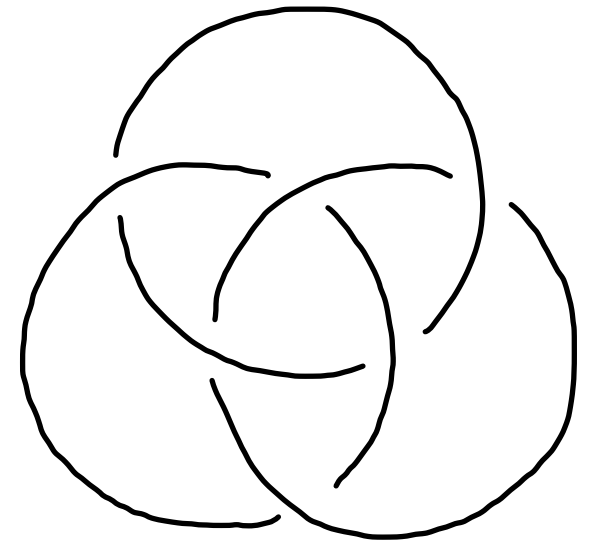
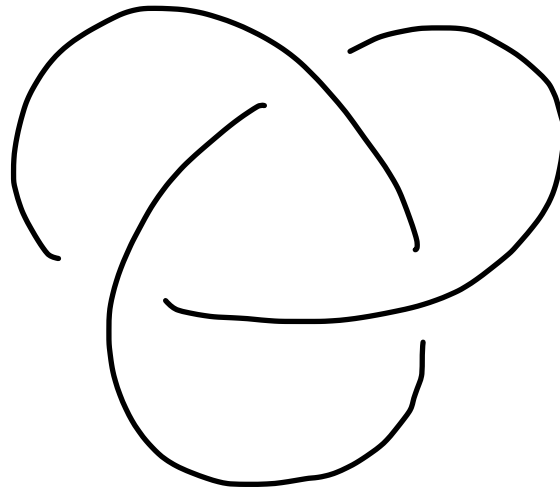
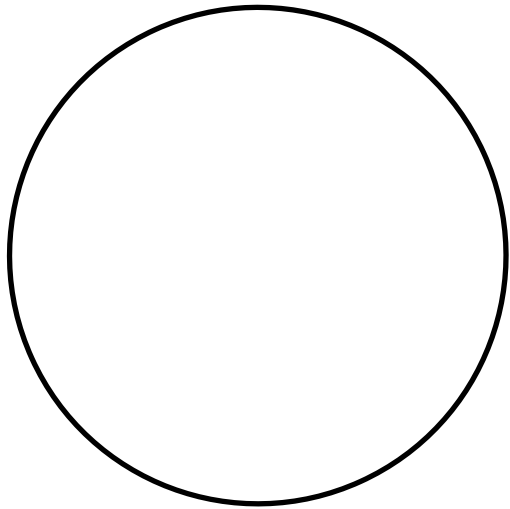
# Drei Dimensionen?



# Drei Dimensionen?



# Drei-dimensionale Räume aus Knoten



# Zusammenfassung

- Knoten sind verknottete Schleifen
- Zwei Knoten gelten als äquivalent, wenn sie in einander überführt werden können.
- Färbungen lassen uns beweisen, wenn zwei Knoten oder Verschlingungen nicht äquivalent sind.
- Drei-dimensionale Räume lassen sich durch Knoten und Verschlingungen genau beschreiben.



Fragen?